**Transformacja Lorentza – prędkość, pęd, energia**

**Przykładowe ćwiczenie**

***Pierwsze ćwiczenie***

Znaleźć progową (minimalną) energię protonu, aby w zderzeniu z drugim protonem mogło dojść do aktu kreacji

1) mezonu $\pi_0$;

2) pary proton-antyproton.

Masa protonu $m_p = 938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$, masa pionu $m_{\pi_0} = 135 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ .

*Rozwiązanie:*

Korzystamy z niezmiennika transformacji Lorentza $s^2 = \left(\frac{\sum E}{c}\right)^2 - \left(\sum \vec{p}\right)^2$ . Stanowi on zarazem kwadrat długości wypadkowego czterowektora energii-pędu, która, zgodnie z zasadą zachowania energii-pędu, będzie jednakowa przed i po reakcji. Dodatkowo, niezmiennik jest oczywiście identyczny co do wartości w różnych układach odniesienia. Dlatego przyrównamy $s^2$(przed, LAB) – skąd otrzymamy progową wartość $E_K$ rozpędzanego w kolajderze protonu, tak jak my ją w układzie LAB odczytujemy i kontrolujemy – z $s^2$(po, CMS), bo w układzie środka masy, przy dostarczeniu progowej energii, suma pędów produktów reakcji jest równa zeru: $\sum \vec{p} = \vec{0}$ .

Ad 1)

$$p + p \rightarrow p + p + \pi_0$$

Jeśli energię całkowitą rozpędzanego protonu oznaczymy jako $E_1$ , a jego pęd jako $\vec{p}_1$ (drugi proton jest nieruchomy), to mamy

$$s^2_{przed,\,LAB} \cdot c^2 = \left(E_1 + m_p c^2\right)^2 - \left(\vec{p}_1 - \vec{0}\right)^2 \cdot c^2 \quad .$$

Ze związku dyspersyjnego mamy tożsamość

$$E_1^2 = \left(p_1\, c\right)^2 + \left(m_p c^2\right)^2 , \text{ skąd } p_1^2\, c^2 = E_1^2 - m_p^2\, c^4 \quad .$$

Po podstawieniu do powyższej równości, otrzymujemy

$$s^2 c^2 \;=\; E_1^2 + 2E_1 m_p c^2 + m_p^2 c^4 \;-\; E_1^2 + m_p^2 c^4 \;=\; 2E_1 m_p c^2 + 2m_p^2 c^4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; E_1 \;=\; \frac{s^2 c^2}{2m_p c^2} - m_p c^2 \quad .$$

Energia kinetyczna

$$E_K \;\equiv\; E_1 - m_p c^2 \;=\; \frac{s^2 c^2}{2m_p c^2} - 2m_p c^2 \quad .$$

Wartość $s_{po,CMS}^2 \cdot c^2 \;=\; \left(2m_p c^2 + m_{\pi_0} c^2\right)^2 - 0$ . Wstawiając ją do równania powyżej, otrzymujemy

$$E_K \;=\; \frac{\left(2m_p c^2 + m_{\pi_0} c^2\right)^2}{2m_p c^2} - 2m_p c^2 \quad .$$

Stąd, energia progowa $E_K \;=\; 279.7\,\mathrm{MeV}$ .

Ad 2)

$p + p \;\rightarrow\; p + p + \bar{p} + p$

Do tego momentu, obliczenia są identyczne, jak w poprzednim przypadku (zderzamy takie same dwa protony): $E_K \;=\; \dfrac{s^2 c^2}{2m_p c^2} - 2m_p c^2$ . Jedyną różnicę stanowi wartość *s*(po, CMS) – jest to obecnie energia spoczynkowa czterech protonów:

$$s_{po,\,CMS}^2 c^2 \;=\; \left(4m_p c^2\right)^2 - 0^2 \quad .$$

Stąd

$$E_K \;=\; \frac{16 m_p^2 c^4}{2m_p c^2} - 2m_p c^2 \;=\; 8m_p c^2 - 2m_p c^2 \;=\; 6m_p c^2 \quad .$$

Tak więc, energia progowa dla tej reakcji, $E_K \;=\; 5628\,\mathrm{MeV} \;\equiv\; 5.63\,\mathrm{GeV}$ .

***Drugie ćwiczenie***

Neutralny pion rozpada się na dwa fotony. Znaleźć energię fotonu w funkcji jego kąta propagacji względem oryginalnego kierunku ruchu pionu.

Nb. pion zero jest cząstką nienaładowaną, a zatem tak naprawdę musi rozpadać się „dwuetapowo”: silnie, a następnie produkty jego rozpadu oddziałują elektromagnetycznie, aby powstały dwa fotony. Zob. ilustrację z *Physics Stack Exchange:*

**4b. Neutral Pion Decay to Two Gammas.** The decay $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ cannot occur directly since the $\pi^0$ is uncharged. Uncharged particles do not experience the electromagnetic interaction, and that is the only interaction experienced by the $\gamma$. Thus the $\pi^0$ must first undergo a strong decay to charged mesons or to a charged baryon-antibaryon pair (Fig. 9).

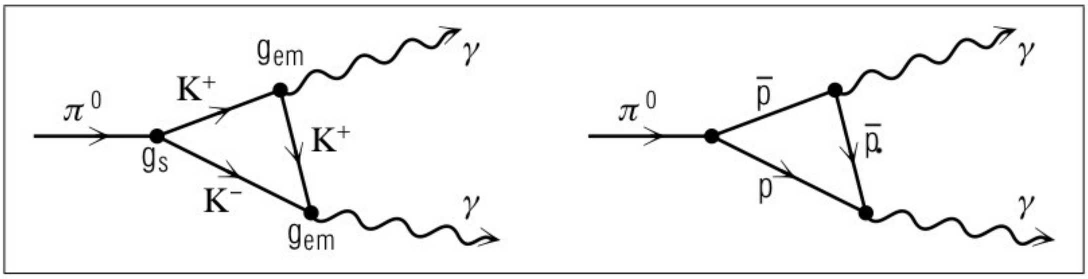



**Figure 9.**

*Rozwiązanie:*

$\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$

Analizując rozpad w układzie spoczynkowym pionu (w układzie środka masy – CMS), stwierdzimy, że fotony będą rozchodziły się przeciwbieżnie: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow p_1^2 = p_2^2$ , począwszy od punktu ich kreacji. Tylko w ten sposób możemy spełnić zasadę zachowania pędu dla kierunku prostopadłego. Dlatego niezmiennik transformacji Lorentza wyniesie

$$s^2_{po,\,CMS} \cdot c^2 = (E_1 + E_2)^2 - \vec{0}^2 = E_1^2 + 2E_1E_2 + E_2^2 = \begin{Bmatrix} foton\, nie\, ma\, masy: \\ E_\gamma = p_\gamma c \end{Bmatrix} =$$

$$= p_1^2c^2 + 2p_1p_2c^2 + p_2^2c^2 = \begin{Bmatrix} ale \\ p_1 = p_2 \end{Bmatrix} = p_1^2c^2 + 2p_1^2c^2 + p_1^2c^2 = 4p_1^2c^2 \ .$$

Tymczasem, w układzie LAB, przed rozpadem

$$s^2_{przed,LAB} \cdot c^2 \;=\; E^2_{\pi_0} \;-\; p^2_{\pi_0} c^2 \quad ;$$

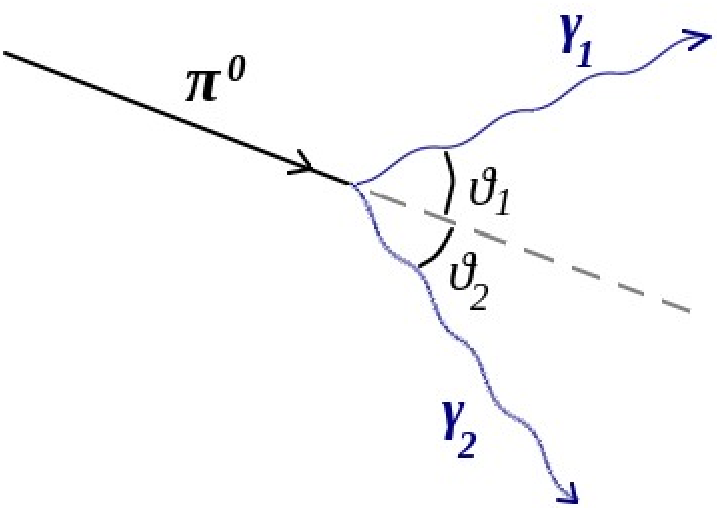
przy czym, wobec związku dyspersyjnego, $E^2_{\pi_0} = (p_{\pi_0} c)^2 + (m_{\pi_0} c^2)^2 \;\Rightarrow\; p^2_{\pi_0} c^2 = E^2_{\pi_0} - (m_{\pi_0} c^2)^2$ , podstawienie tegoż daje:

$$s^2_{przed,LAB} \cdot c^2 \;=\; (m_{\pi_0} c^2)^2 \quad .$$

Porównując ze sobą oba niezmienniki (kwadrat długości czterowektora energii-pędu), otrzymujemy spodziewaną przez nas zależność:

$$(m_{\pi_0} c^2)^2 \;=\; 4 p_1^2 c^2 \;\Rightarrow\; m_{\pi_0} c \;=\; 2 p_1 \;\Rightarrow\; p_1 \;=\; \frac{m_{\pi_0} c}{2} \;;$$
$$E_1 \;=\; E_2 \;=\; \frac{m_{\pi_0} c^2}{2} \;=\; 67.5 \text{ MeV} \quad .$$

W układzie spoczynkowym pionu (w układzie środka masy) fotony dzielą się po połowie energią spoczynkową pionu i rozlatują w dwóch przeciwnych kierunkach. Jednakże, przy przejściu do układu LAB, zostaną one przesunięte dopplerowsko (*relatywistyczny efekt Dopplera*).




Współrzędne energii-pędu wybranego fotonu w układzie LAB – w którym my obserwujemy zjawisko – są niedookreślone (mamy zbyt mało danych w stosunku do niewiadomych). Znamy co prawda wartość *E* i *p*, ale nie znamy dokładnego podziału pędu fotonu pomiędzy składowe (tzn. kąta, pod jakim rozlatuje się dany foton). Wiemy tylko, że składowe prostopadłe pędu obu fotonów są przeciwne i że energia pionu zamienia się na energię dwóch fotonów, podobnie jak pęd pionu na składowe równoległe pędu dwóch fotonów. Traktując zatem kąt $\vartheta_1$ (por. obrazek) jako zmienną niezależną, zaś prędkość początkową *v* pionu jako parametr, wypiszmy to, co wiemy: zasady zachowania energii i zachowania pędu w układzie LAB.

$$
\begin{aligned}
E: &\qquad \gamma(v)\, m_{\pi_0} c^2 \;=\; E_1 + E_2 \\
p_{\parallel}: &\qquad \gamma(v)\, m_{\pi_0} v \;=\; \frac{E_1}{c}\cos\vartheta_1 + \frac{E_2}{c}\cos\vartheta_2 \\
p_{\perp}: &\qquad \frac{E_1}{c}\sin\vartheta_1 \;=\; \frac{E_2}{c}\sin\vartheta_2
\end{aligned}
$$

Aby wyeliminować w równaniu drugim kąt $\vartheta_2$ , posłużymy się równaniem trzecim. Mamy więc:

$$
\cos^2\vartheta_2 \;=\; 1 - \sin^2\vartheta_2 \;=\; 1 - \frac{E_1^2}{E_2^2}\sin^2\vartheta_1 \quad .
$$

Podnosimy równanie drugie do kwadratu:

$$
\left(\gamma(v) m_{\pi_0} v - \frac{E_1}{c}\cos\vartheta_1\right)^2 \;=\; \frac{E_2^2}{c^2} - \frac{E_1^2}{c^2}\sin^2\vartheta_1 \quad .
$$

Wyeliminujemy z niego $E_2$ , korzystając z równania pierwszego, $\frac{E_2}{c} = \gamma(v) m_{\pi_0} c - \frac{E_1}{c}$ ; wówczas

$$
\left(\gamma(v) m_{\pi_0} v - \frac{E_1}{c}\cos\vartheta_1\right)^2 + \frac{E_1^2}{c^2}\sin^2\vartheta_1 \;=\; \left(\gamma(v) m_{\pi_0} c - \frac{E_1}{c}\right)^2 \quad ;
$$

po rozpuszczeniu nawiasów i uproszczeniu wyrazów (Czytelnik zrobi to krok po kroku) otrzymujemy

$$
\gamma^2(v) m_{\pi_0}^2 (v^2 - c^2) \;-\; 2 E_1 \gamma(v) m_{\pi_0}\left(\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 - 1\right) \;=\; 0 \,,
$$

$$
\text{skąd}\quad E_1 \;=\; \frac{\gamma(v) m_{\pi_0} c^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)}{2\left(\frac{v}{c}\cos\vartheta_1 - 1\right)} \;=\; \frac{E_{\pi_0}}{2}\;\frac{1}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta_1} \quad .
$$

Rzeczywiście, dla spoczywającego pionu fotony dzielą się po połowie jego energią (spoczynkową). Foton 1 uzyskuje największą możliwą energię wtedy, gdy $\vartheta_1 = 0 \;\; (\Rightarrow \;\; \vartheta_2 = \pi)$ . Oba fotony nie mogą w tym przypadku polecieć naprzód, ze zgodnymi zwrotami prędkości (wzdłuż toru pionu), bowiem wtedy równania pierwsze i drugie łącznie wymuszałyby warunek $v_\pi = c$.

Foton 1 unosi minimalną część energii dostępnej dla produktów rozpadu wówczas, gdy $\vartheta_1 = \pi$ . Fotony zamieniły nam się rolami względem przypadku maksymalnego.

Jeśli fotony podzielą między siebie energię ruchomego pionu po równo (ta sama długość pędu dla obydwu), to ruch jednego będzie lustrzanym odbiciem drugiego. Lot w przeciwnych kierunkach jest wzbroniony z uwagi na równanie drugie, które miałoby zero po prawej stronie.

*Autor rozwiązań: Marek Pietrachowicz.*